PROBLÈMES DE LA 1ÈRE ÉDITION DU MTYM
MOROCCAN TOURNAMENT OF YOUNG MATHEMATICIANS

MATH&MAROC

Table des matières

Préambule

Les problèmes proposés dans cette compétition sont d'une grande difficulté, et pour certains, ils peuvent même ne pas admettre de solution complète. L'objectif de ce tournoi ne consiste pas à résoudre chaque problème de manière exhaustive dans un laps de temps limité, mais plutôt à encourager une démarche de recherche active, caractérisée par l'exploration de multiples approches et la formulation de nouvelles interrogations. Au cours de votre participation à MTYM, vous développerez une gamme étendue de compétences inhérentes au métier de chercheur, notamment la rigueur, l'esprit critique, la capacité à communiquer, le travail d'équipe, la créativité et surtout la curiosité intellectuelle.

Si vous vous trouvez confrontés à une question particulièrement difficile, voici quelques démarches à envisager :

— Explorez les cas particuliers : Essayez de démontrer le résultat dans des configurations simples et basiques. Montrez la validité de votre hypothèse pour de petites valeurs de $n = 2, 3, \cdots$, ou pour des entiers spécifiques.

— Formulez des conjectures : Après avoir exploré les cas particuliers, tentez de conjecturer le résultat général. Y a-t-il un motif ou une régularité que vous pouvez observer dans les données ?

— Divisez et conquérez : Face à un problème vaste ou complexe, divisez-le en parties plus gérables. Cherchez des sous-problèmes que vous pourriez résoudre individuellement.

— Reconsidérez votre approche : Parfois, une simple modification de l'approche peut ouvrir la voie à une solution.

Pour toute demande concernant les problèmes proposés contactez nous par mail :

math.maroc.mtym@gmail.com

Définitions et Notations

— Un **ensemble** est une collection d'objets deux à deux distincts appelés **éléments**.

— L'ensemble A est **inclus** dans B si tous les éléments de A sont des éléments de B, autrement dit : si $x \in A$, alors $x \in B$. On le note $A \subset B$.

— On dit qu'un ensemble est fini s'il contient un nombre fini d'éléments. Dans ce cas, nous dénotons par sa **cardinalité** ce nombre d'éléments.

— $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

Date: 5 mars 2024.

- $\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs.
- Une **application** f est une relation d'un ensemble E (*de départ*) vers un ensemble F (*d'arrivée*) telle que tout élément de l'ensemble E a une et une seule image dans l'ensemble F. Si $x \in E$ et $y \in F$ son image par f, alors on écrit $y = f(x)$.
- Une application f est **injective** si deux éléments de l'ensemble de départ ont toujours deux images par f distinctes dans l'ensemble d'arrivée.
- Une application f est **surjective** si pour tout élément y de F, l'équation $y = f(x)$ admet toujours au moins une solution x appartenant à E.
- Une application f est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective.
- Soit $S = \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ un sous ensemble de $\{1, 2, \cdots, n\}$ et $x_1, x_2, \cdots, x_n$ une suite, on note $\sum_{i\in S} x_i = x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_k}$. Autrement dit on fait la somme de tout les éléments de S
- On dit que b **divise** a s'il existe un entier k tel que $b = ka$.
- Pour des nombres entiers positifs, nous appelons leur **PGCD** (Plus Grand Diviseur Commun) le plus grand entier strictement positif qui divise tous ces entiers à la fois.
- Pour des nombres entiers positifs, on dit qu'ils sont **premiers entre eux** si leur PGCD vaut 1.
- On dit que deux entiers a et b appartiennent à la même **classe d'équivalence** modulo n s'ils ont le même reste de leur division euclidienne par n.
- Pour un réel x, nous notons $|x|$ sa **valeur absolue**, c'est à dire x si x est positif, et $-x$ si x est négatif.

1. La géométrie et les entiers

L'objectif de ce problème est d'étudier l'existence de certaines figures géométriques, en imposant que certaines longueurs spécifiques prennent des valeurs entières.

Cas 2D Nous allons commencer par le cas en deux dimensions, en nous intéressant au cas d'un rectangle.

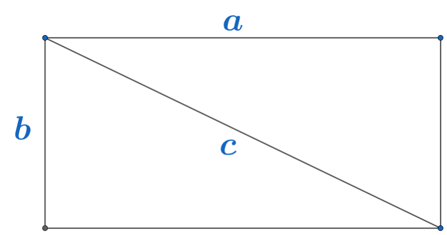

Figure 1. Notations pour un rectangle

On dit qu'un rectangle est *bon* si ses deux cotés et sa diagonale ont des longueurs entières. Nous allons suivre les notations de la figure 1. Ainsi, un tel rectangle est bon si et seulement si a, b, c sont des entiers naturels.

On dit qu'un tel rectangle est primitif si et seulement si a, b, c sont premiers entre eux.

(1) Donner des exemples de bons rectangles primitifs pour des petites valeurs.
(2) Traiter le cas où le rectangle est un carré ($a = b$).
(3) Caractériser tous les bons rectangles primitifs et ainsi tous les bons rectangles.

Cas 3D

Nous nous intéressons ici au cas en trois dimensions, en particulier en s'intéressant aux parallélépipèdes. Nous allons suivre les notations de la figure 2.

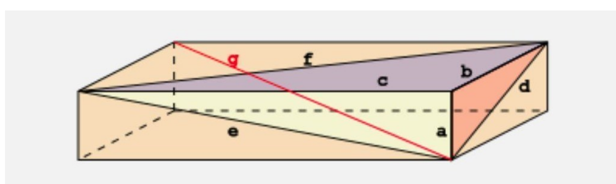

Figure 2. Notations pour un parallélépipède

On dit qu'un parallélépipède est bon si ses cotés et ses diagonales externes ont des longueurs entières, c'est à dire si a, b, c, d, e, f sont tous des entiers naturels. Il est dit primitif si et seulement si a, b, c sont premiers entre eux.

En plus, on dit qu'un parallélépipède est remarquable s'il est bon, primitif et que sa diagonale interne a une valeur entière, c'est à dire si g est un entier naturel.

(1) Prouver que si un parallélépipède est bon, alors pour chaque $n \in \{2, 3, 5, 11\}$, n divise au moins l'un des entiers : a, b, c.
(2) (Optionnel) Trouver à l'aide d'un programme python un bon parallélépipède primitif.
(3) En déduire qu'il existe une infinité de bons parallélépipèdes primitifs. (On pourra utiliser chercher une transformation qui, en partant d'un bon parallélépipède primitif, construit un nouveau).

(4) On prend u, v, w des entiers naturels qui vérifie $u^2 + v^2 = w^2$.
Montrer que $a = u|4v^2 - w^2|$, $b = v|4u^2 - w^2|$, $c = 4uvw$ sont les arêtes d'un bon parallélépipède.

On va traiter maintenant le cas des parallélépipèdes remarquables.

(5) Peut-on construire un parallélépipède remarquable en utilisant la construction donnée en (iv) ?
Supposons que l'on dispose d'un parallélépipède remarquable. Selon les notations de la figure2, l'objectif est de le caractériser en prouvant des propriétés qui portent sur a, b, c.

(6) Montrer que 7 divise forcément a, b ou c.

(7) Montrer que $5^4 = 625$ divise abc.

(8) Étudier et proposer d'autres pistes de recherche.

2. Objectif Excellence : Un défi de maximisation

Introduction. Mohammed a un professeur de mathématiques qui aime tester ses élèves fréquemment. Pour ce faire, il leur fait passer des contrôles de mathématiques toutes les semaines, et affecte à chaque contrôle un coefficient qu'il décide en fonction de la difficulté et du nombre d'exercices du contrôle. Ayant oublié la date du premier contrôle, Mohammed s'est absenté et n'a pas pu le passer, ce qui agace son professeur qui décide de lui donner la note de 0.

Mohammed, confiant en ses capacités en mathématiques, décide de prouver au professeur qu'il ne le mérite pas, et fournit beaucoup d'efforts durant l'année pour se rattraper. Le professeur, ayant observé tous ses efforts, décide de lui offrir un compromis et lui dit : “je ne vais pas retirer ta note de 0 du premier contrôle, mais parmi les contrôles suivants, je te donne la liberté de sélectionner ceux que tu veux, que je compterai, et je supprimerai les autres”.

Mohammed, content, se précipite d'analyser ses notes pour sélectionner l'ensemble de contrôles qui maximisera sa note finale.

Formalisation. Soit $n + 1$ le nombre de contrôles passés durant toute l'année, incluant le premier contrôle que Mohammed a raté. Mohammed a donc un 0 et n notes strictement positives. On numérote les contrôles de 0 à n. Pour chaque $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, on dénote par r_i la note obtenue dans le $i-$ème contrôle, et par c_i le coefficient du i-ème contrôle. En particulier, on sait que $r_0 = 0$. Donc, si Mohammed sélectionne un sous ensemble de contrôles $S \subseteq \{1, \dots, n\}$, sa note finale est :

$$(\star) \qquad \frac{\sum_{i \in S} c_i r_i}{c_0 + \sum_{i \in S} c_i}.$$

Échauffements.

(1) *Exemple :* Par souci de simplicité dans cet exemple, on suppose que $n = 3$. Les notes de Mohammed sont $(0, 17.5, 19, 16)$, et les coefficient sont (dans l'ordre) $(9, 5, 1, 8)$.
   (a) Si Mohammed choisit l'ensemble de contrôles $\{1, 3\}$, quelle sera sa note finale ?(on rappelle que le contrôle 0 est toujours inclus dans la note) Faire de même avec $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2, 3\}$.
   (b) En essayant toutes les alternatives, quel est l'ensemble de contrôles optimal que Mohammed doit choisir pour maximiser sa note finale ? (Les alternatives sont $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$).

(2) Si Mohammed n'avait pas raté le premier examen, et que le professeur lui avait fait la même proposition, i.e., de choisir le sous-ensemble de contrôles qu'il souhaite, que choisirai Mohammed pour maximiser sa note ? Pourquoi est-ce différent lorsqu'il a une note de 0 dans le premier contrôle ? Donner une interprétation en français en quelques lignes.

Ne sois pas naïf ! Revenons à la situation générale où Mohammed a passé $n + 1$ contrôles. Le rôle de votre groupe est d'aider Mohammed à sélectionner le sous ensemble optimal de contrôles, afin de maximiser sa note finale.

(3) Quel est le nombre totale de sous-ensembles que Mohammed peut choisir ? Justifier votre réponse par une preuve mathématique. *Indice :* Essayer avec $n = 2, 3, 4, 5$, conjecturer, puis prouver.

(4) Pour chaque sous-ensemble de contrôles, Mohammed peut obtenir sa note totale en utilisant la formule ($\star$), ce qui lui prend 10 secondes à écrire sur sa calculatrice. Supposons, dans cette question uniquement, que Mohammed a passé 30 contrôles au total durant l'année. Combien de siècles lui faudrait-il pour évaluer tous les sous ensembles possibles ?

Vu que l'espérance de vie moyenne au Maroc est de 73 ans, Mohammed a donc besoin d'une manière plus efficace pour optimiser sa note en mathématiques.

Optimisez ... Pour chaque sous ensemble de contrôles $S \in \{1, \dots, n\}$, on dénote par $R(S)$ la note finale de Mohammed s'il choisit le sous ensemble S (dont on rappelle que la formule est donnée par ($\star$)).

(5) *Préliminaires :* Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. On dit que a est une combinaison convexe de b et c si il existe un réel $t \in [0, 1]$ tel que
$$a = (1 - t)b + tc.$$
Montrer que si a est une combinaison convexe de b et c alors soit $b \leqslant a \leqslant c$ ou $c \leqslant a \leqslant b$.

(6) Soit S un sous ensemble de contrôles, et soit j un contrôle tel que $j \notin S$. Montrer que $R(S \cup \{j\})$ est une combinaison convexe de $R(S)$ et r_j.

(7) Montrer que $\{1, 3\}$ ne peut pas être le sous ensemble optimal de cardinalité maximale. En d'autres termes, montrer que si $\{1, 3\}$ est optimal alors, il existe un sous ensemble de cardinalité supérieure également optimal.

(8) Proposer à Mohammed une méthode pour déterminer le sous ensemble optimal en moins de n évaluations de la formule ($\star$).

Taquin le professeur :) Mohammed, tout content de son ensemble de contrôles, soumet sa solution à son professeur. Surpris, le professeur décide de lui donner un dernier challenge. Il lui dit : "Je vois que tu as réussi à maximiser ta note, cependant, le sous ensemble que tu m'as donné est trop grand. Je te demande donc de limiter la taille de l'ensemble de contrôles soumis".

Soit k un entier tel que $k \leqslant n$. Le but de cette dernière partie est d'aider Mohammed à choisir le sous ensemble de contrôles optimal de cardinalité inférieure ou égale à k.

(9) Montrer que pour tout $S \subseteq \{1, \dots, n\}$,
$$R(S) = \frac{1}{c_0} \sum_{i \in S} (r_i - R(S)) c_i.$$

(10) Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose l'existence d'une boîte noire qui calcule instantanément la note maximale que Mohammed peut atteindre avec un ensemble de cardinalité inférieure ou égale à k, sans pour autant lui fournir l'ensemble de contrôles qui lui permet de l'atteindre. Notons cette note maximale par r^*. Montrer que Mohammed peut alors trouver l'ensemble de contrôles optimal de cardinalité inférieure ou égale à k, en effectuant moins de $3n$ additions et multiplications. *Indice :* Commencer par montrer en utilisant la question précédente qu'au lieu de maximiser $R(S)$, Mohammed peut maximiser $\sum_{i \in S} (r_i - r^*) c_i$.

(11) En réalité, Mohammed n'a pas accès à une boîte noire qui lui fournit sa note optimale. Montrer que Mohammed peut quand même trouver son ensemble optimal de contrôles en effectuant moins de n^3 évaluations de l'équation ($\star$).

3. Une course circulaire

Considérons n particules numérotées de 1 à n assimilées à des points $p_1, \cdots, p_n$ se déplaçant sur un cercle $(\mathscr{C})$ dans le sens trigonométrique, avec des vitesses angulaires constantes $\omega_1, \cdots, \omega_n$ respectivement. Dans un premier temps, supposons l'absence de chocs entre les particules, c'est-à-dire que si la particule p_j est plus rapide que la particule p_i, cette dernière peut être dépassée par p_j sans être "touchée". Introduisons un point de référence R situé sur le cercle à l'extrémité droite du diamètre horizontal de $(\mathscr{C})$. À tout moment où deux particules n'occupent pas la même position, considérons la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ obtenue en lisant les numéros des particules à partir du point de référence R et dans le sens trigonométrique.

Par exemple, la configuration des particules dans la Figure 3 donne la permutation $\sigma = (3, 1, 2, 4)$.

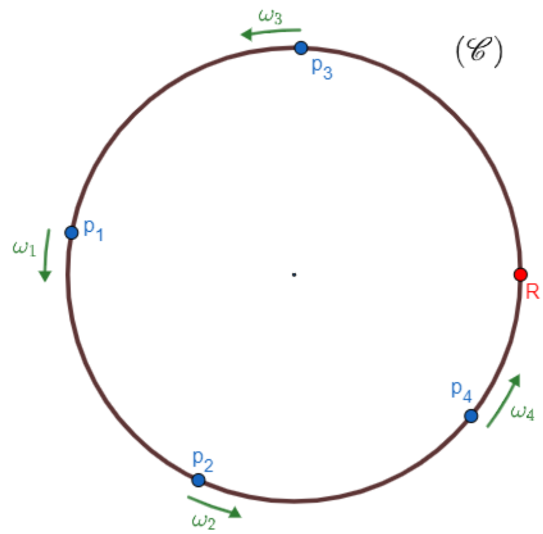

FIGURE 3. Les particules $p_1, \cdots, p_4$ se déplacent sur le cercle $(\mathscr{C})$ dans le sens trigonométrique.

Préliminaires. On dit que σ est une permutation de l'ensemble $[n] = \{1, \cdots, n\}$ si σ est une application bijective de $[n]$ vers $[n]$. De plus, si $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ sont les images de $1, \cdots, n$ par σ respectivement on notera alors σ par $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$. Par exemple, si $n = 3$ et que $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 1$ alors on note $\sigma = (2, 3, 1)$. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble de toutes les permutations de $[n]$.

(1) Expliciter tous les éléments de l'ensemble $\mathfrak{S}_3$. Combien y a-t-il d'éléments ?

(2) Calculer le cardinal de l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(3) Dans le cas où deux particules ce déplacent sur le cercle $(\mathscr{C})$ avec les mêmes vitesses, montrer qu'on peut obtenir toutes les permutations de $\mathfrak{S}_2$. C'est à dire qu'il existe deux instants t_1 et t_2 tels que à t_1 on obtient la permutation $(1, 2)$ et à t_2 on obtient la permutation $(2, 1)$.

(4) Dans le cas où trois particules se déplacent sur le cercle $(\mathscr{C})$ avec les mêmes vitesses, montrer qu'on ne peut pas obtenir toutes les permutations de $\mathfrak{S}_3$. Quelles sont les permutations qu'on peut générer dans ce cas ? Quelles conditions sur les vitesses et les positions initiales qui nous permettront de générer toutes les permutations alors ?

Partie A.

(1) Supposons que toutes les particules partent initialement du même point R. Existe-t-il un n-uplet de vitesses $(\omega_1, \cdots, \omega_n)$ permettant de générer toutes les permutations ? Peut-on caractériser ces vitesses ?

(2) Supposons maintenant que les particules ne partent pas forcément du même endroit. Quelles sont les positions de départ et les vitesses qui permettent de générer toutes les permutations ?

(3) Étudier le cas où les particules n'ont pas nécessairement le même sens du mouvement.

Partie B. Ajoutons maintenant une barrière au point R. Si une particule touche la barrière, elle rebondit (choc dur) en conservant sa vitesse par rapport au cercle mais en sens opposé. Voir la Figure 4.

(1) Existe-t-il des positions de départ et des vitesses permettant de générer toutes les permutations des entiers de 1 à n ? Caractériser-les.

(2) Existe-t-il des positions et vitesses initiales telles que chaque permutation des entiers de 1 à n apparaît exactement une fois par période ?

Partie C. Supposons maintenant que deux particules ayant des numéros dont la parité est identique se "touchent" par un choc dur. Autrement dit, si la particule p_5 est plus rapide que p_3, p_5 touche p_3 et donc ne peut pas la dépasser. Cependant, si p_5 est plus rapide que p_4, elle dépasse p_4 sans la toucher.

(1) Choisir une modélisation du choc de deux particules en distinguant le cas où les deux particules se déplacent dans le même sens ou non.

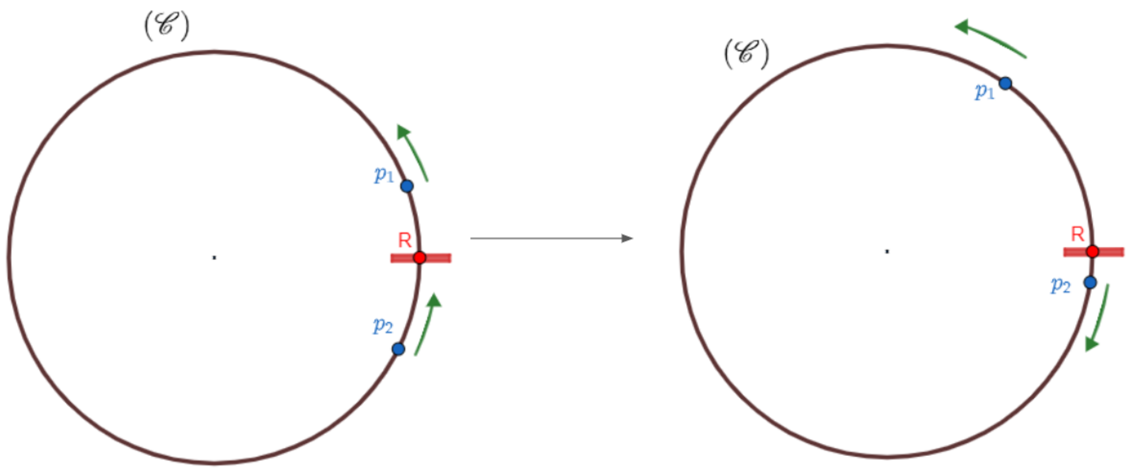

FIGURE 4. Choc de la particule p_2 avec la barrière.

(2) Décrire les permutations qu'on ne peut plus obtenir.

(3) Reprendre les questions des parties A et B. On supposera dans un premier temps l'absence de la barrière en R.

(4) Soit m un entier entre 1 et n. Supposons maintenant que les chocs sont entre les particules p_i tels que les i appartiennent à la même classe d'équivalence modulo m. Reprendre les questions des parties A et B.

Partie D. Modifions maintenant la définition de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ obtenue à partir d'une configuration particulière des particules sur le cercle ($\mathscr{C}$). À tout moment où deux particules ne sont pas alignées verticalement, considérons la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ obtenue en projetant les particules sur la droite horizontale ($\mathscr{D}$).
Par exemple, la permutation obtenue par la configuration dans la Figure 5 est $\sigma = (1, 2, 3, 4)$.

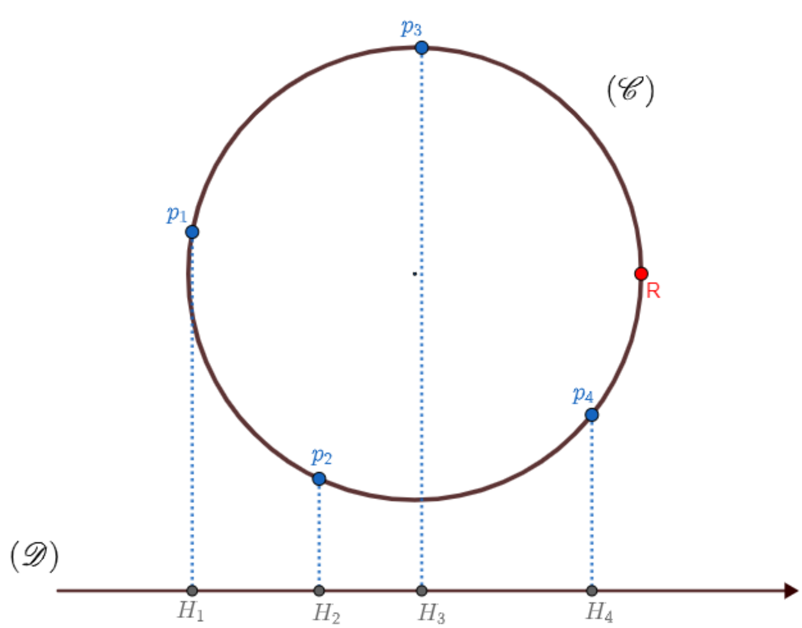

FIGURE 5. Projection des particules sur la droite ($\mathscr{D}$).

(1) Reprendre les questions des parties A, B et C.

(2) Étudier le problème lorsqu'on introduit des accélérations.

(3) Proposer d'autres pistes de recherche.

4. Rotation d'une aiguille

Enoncé. On dispose d'une aiguille de longueur 1. L'objectif est de faire un demi-tour à l'aiguille en balayant l'aire minimale. L'aiguille ne peut que glisser ou tourner tout en restant dans le plan.

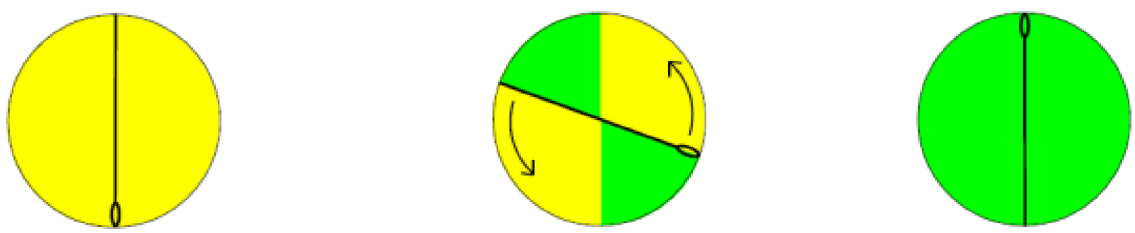

Figure 6. Exemple du disque

Postulat. La translation de l'aiguille suivant la direction vers laquelle elle pointe ne consomme aucune aire (L'aiguille est un segment donc d'épaisseur nulle).

Figure 7. Aire utilisé = 0

Questions.

(1) Montrer, par une succession de schémas à compléter en annexe à rendre, qu'il est possible de faire effectuer un demi-tour à cette aiguille dans un triangle équilatéral (qu'il faut préciser ses dimensions).

(2) On considère une famille de surfaces particulières : les "trisectangles"

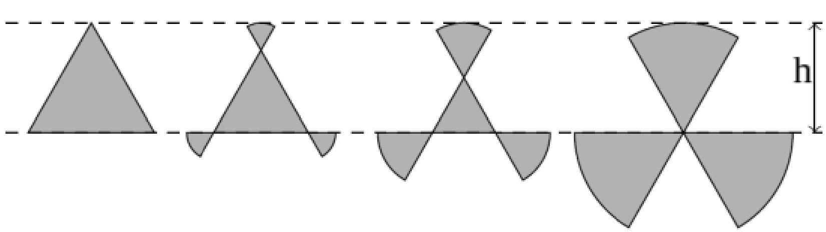

Figure 8. Famille de trisectangles

Cette surface est formée d'un triangle équilatéral et d'un secteur angulaire à chacun de ses sommets, chaque côté d'un secteur étant le prolongement d'un côté du triangle. Les trois secteurs sont superposables.

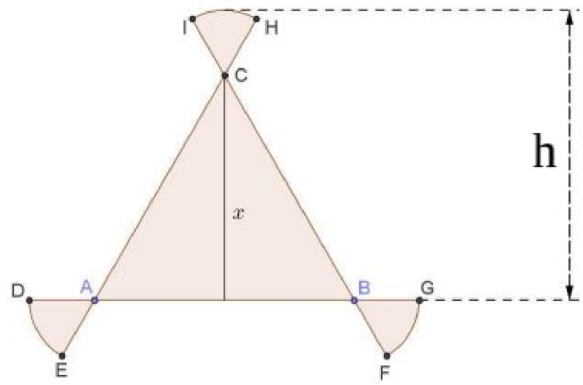

FIGURE 9. Construction d'un trisectangle

(a) Montrer, par une succession de schémas à compléter en annexe à rendre, qu'il est possible de faire effectuer un demi-tour à cette aiguille dans un trisectangle (qu'il faut préciser la hauteur **h**).
(b) Déterminer **x** la hauteur du triangle équilatéral inclus dans le trisectangle, pour minimiser l'aire de cette surface.

(3) Montrer qu'on peut translater une aiguille d'un point A à un point B en balayant une aire minimale. On peut même faire cette opération en balayant une aire arbitrairement petite.

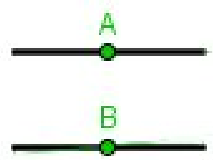

FIGURE 10. Translation de l'aiguille

(4) On part d'un secteur circulaire, disons d'un sixième de cercle (ce qui permet la rotation d'un sixième de tour de l'aiguille). Montrer qu'on peut tourner l'aiguille d'un sixième de tour en

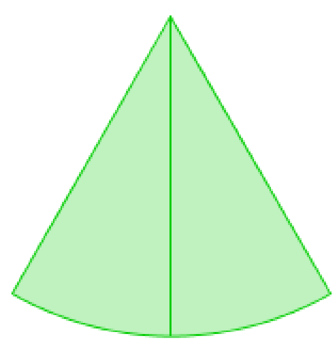

FIGURE 11. Le secteur circulaire : un sixième de cercle

balayant moins d'un sixième de cercle . *Indice : On peut commencer par découper le secteur en deux verticalement*

(5) En exploitant ce qui précède, trouver une méthode pour faire un demi-tour à l'aiguille en balayant une aire minimale.

Annexe à rendre

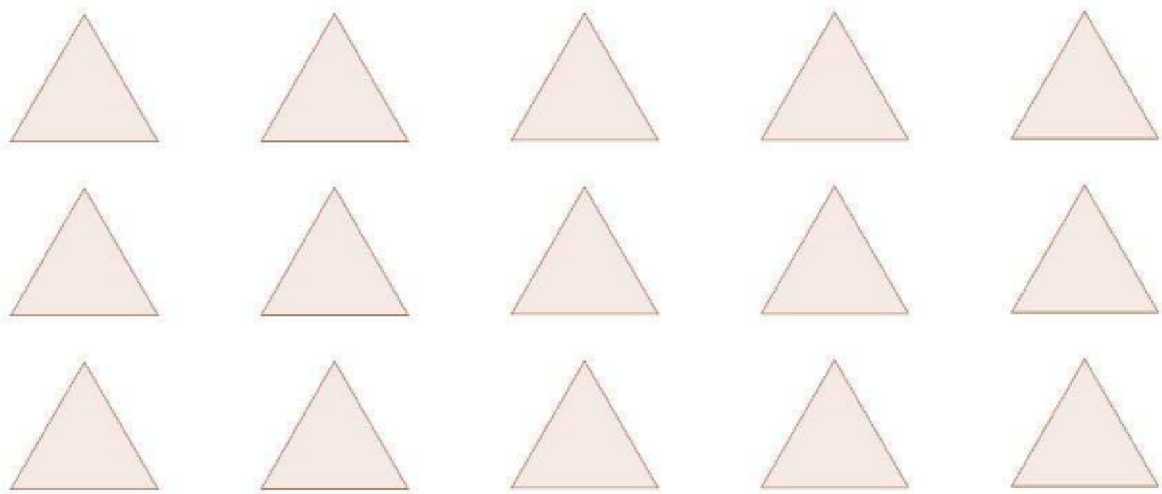

FIGURE 12. Triangle équilatéral

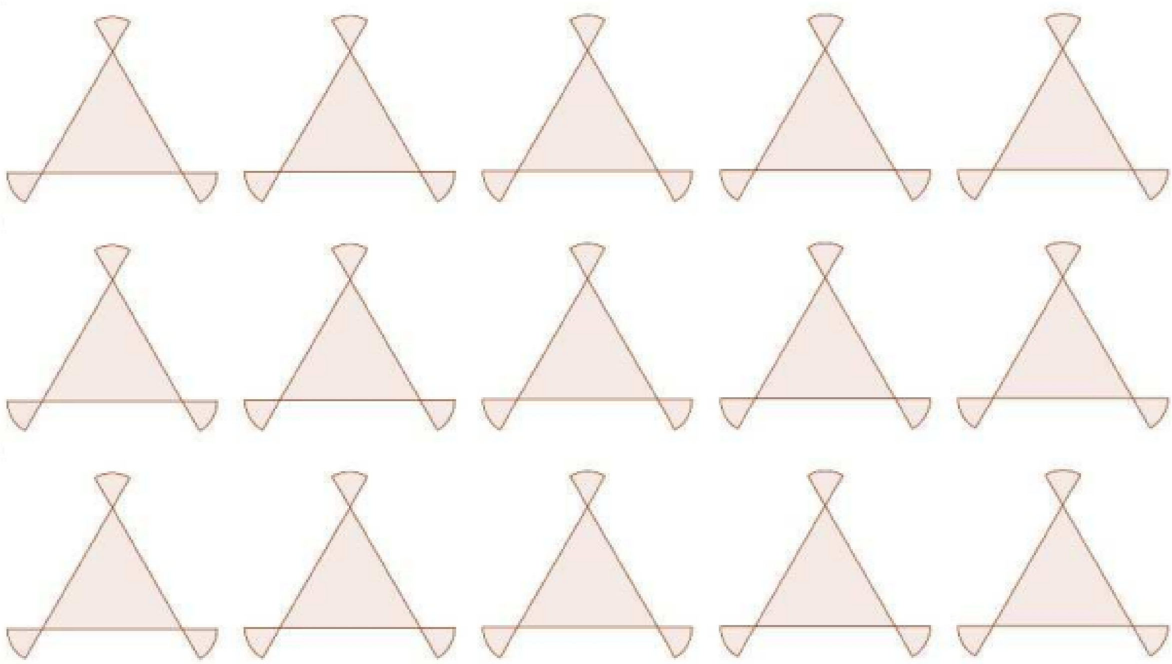

FIGURE 13. Trisectangle